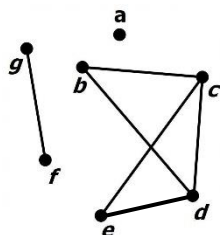


سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

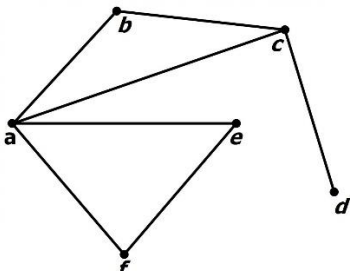
۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید: الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) اگر $a b+c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. پ) برای مقادیر حقیقی و نا صفر a و b به شرط آنکه $a+b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید . الف) حاصل $([m^r, m], m^s)$ برابر با است . ب) اگر برای دو عدد صحیح و نا صفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می گوئیم a و b هستند. پ) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم. ت) تعداد یال های گراف K_7 برابر است.	۱
۳	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: « برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »	۱
۴	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m + 5)$ و $(6m + 5)$ بر a بخشپذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.	۱/۲۵
۵	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.	۱
۶	باقی مانده تقسیم عدد $20! + 19! + 18! + 17! + 16! + 15! + 14! + 13! + 12! + 11! + 10! + 9! + 8! + 7! + 6! + 5! + 4! + 3! + 2! + 1!$ بر ۱۵ بدست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد)	۱/۵
۷	معادله همنهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.	۱
۸	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب) گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ (است. ت) گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	۲
۹	گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید: الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) دوری به طول ۴ بنویسید. پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از راس b بنویسید . ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۵



«ادامه سؤالات در صفحه دوم»

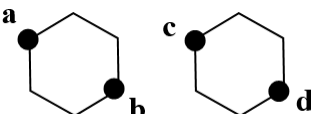

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	تعداد صفحه: ۲	نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی - فیزیک
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۳	ساعت شروع: ۱۰ صبح	پایه دوازدهم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۱		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش	

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	---	------

۱۰	عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱
		
۱۱	یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۱۲	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم . اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند ، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟	۱
۱۳	به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوریکه ، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟	۱/۷۵
۱۴	قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه ریزی کنید.	۱/۲۵
۱۵	چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟	۱/۵
۱۶	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است.	۱/۲۵
	"موفق باشید"	جمع نمره ۲۰

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۱۰ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور دی ماه سال ۱۴۰۱				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
ردیف	راهنمای تصحیح						
۱	الف) درست (۰/۲۵) (صفحه) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)						
۲	الف) m^r (۰/۲۵) ب) نسب به هم اول (۰/۲۵) (ص ۱۳) پ) مینیمال (۰/۲۵) (ص ۴۶) ت) ۲۱ (۰/۲۵) (ص ۳۸)						
۳	$y^r + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^r + y^r + 2xy + x^r + 2x + 1 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ $\Leftrightarrow (x + 1)^r + (x + y)^r \geq 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \text{این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است} \quad (ص ۷ و ۸)$						
۴	$a \mid 6(\delta m + 4) \quad (۰/۵) \rightarrow a \mid 5(6m + 5) - 6(\delta m + 4) \quad (۰/۲۵) \rightarrow a \mid 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = \pm 1 \quad (۰/۲۵) \quad (ص ۱۱)$ $a \mid 5(6m + 5)$						
۵	می دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می باشد (۰/۲۵) $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم (ص ۱۶) $\begin{cases} a^r = 8k + 1 \\ b^r = 8k' + 1 \end{cases} \quad (۰/۲۵) \rightarrow a^r + b^r + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 = 8k'' + 7 \rightarrow r = 7 \quad (۰/۲۵)$						
۶	میدانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و پس داریم (ص ۲۹) $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 20! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots + 20! \equiv 3 \quad (۰/۲۵)$						
۷	چون $20 \mid (12, 8)$ معادله جواب دارد (۰/۲۵) (صفحه ۳۰) $4x \equiv 10 \rightarrow 4x \equiv 4 \quad (۰/۲۵) \rightarrow x \equiv 1 \quad (۰/۲۵) \rightarrow x = 3k + 1 \quad (۰/۲۵)$						
۸	الف) مرتبه (۰/۵) ب) مسیر (۰/۵) پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ (۰/۵) ت) دور (۰/۵) (ص ۳۵ و ۳۸)						
۹	الف) $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 3$ (۰/۵) ب) $bcedb$ (۰/۲۵) <p>پ) $bcde$ یا $bdce$ یا bcd دو مورد هر کدام (۰/۲۵) ت) $N_G(f) = \{g\}$ (۰/۲۵) (ص ۴۱)</p>						
۱۰	روش اول می دانیم $\left \frac{n}{\Delta + 1} \right \leq \gamma(G)$ پس داریم (۰/۲۵) $\left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ بنابراین (۰/۲۵) $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم (۰/۲۵) $\gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$ <p>روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می شود. پس عدد احاطه گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵). اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رؤس را احاطه می کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد. (۰/۲۵) و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) > 1$ بنابراین (۰/۲۵) $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا (۰/۲۵) $\gamma(G) = 2$. (ص ۳۹)</p>						
« ادامه در صفحه ۲ »							

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۰۳		
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشوردی ماه سال ۱۴۰۱	مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره									
۱۱	<p>رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه گری آن (انمره)</p>  <p>(ص ۵۳)</p> <p>(به شکل های دیگر نیز نمره داده شود). مانند:</p> 	۱									
۱۲	<p>(۰/۷۵)</p> <p>$4 \times 2^4 = 384 (۰/۲۵)$</p> <p>(ص ۷۱)</p>	۱									
۱۳	<p>$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \quad x_2 = 3 \quad x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 (۰/۵) \xrightarrow{x_2=3, x_4=y_2+3, x_5=y_5+5}$</p> <p>$x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16 (۰/۲۵) \quad x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5 \quad x_i \geq 0, y_i \geq 0 (۰/۲۵) \rightarrow$</p> <p>$\begin{pmatrix} 5+4-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = 56 (۰/۷۵)$</p> <p>(ص ۷۱)</p>	۱/۷۵									
۱۴	<p>فرض کنیم هر سطر نشان دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس های حاضر در کلاس باشند.</p> <p>(۰/۲۵) طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (۰/۲۵) (ص ۶۲)</p> <table border="1" data-bbox="183 1097 367 1254"> <tr> <td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr> <td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr> <td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <p>(۰/۷۵)</p>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱/۲۵
۱	۲	۳									
۳	۱	۲									
۲	۳	۱									
۱۵	<p>$A \cup B = s - A \cup B = s - A - B + A \cap B (۰/۲۵)$</p> <p>$s = 630 (۰/۲۵), A = 210 (۰/۲۵), B = 126 (۰/۲۵), A \cap B = 42 (۰/۲۵) \quad (ص ۸۳)$</p> <p>$\Rightarrow A \cup B = 336 (۰/۲۵)$</p>	۱/۵									
۱۶	<p>ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هفت نقطه را</p> <p>هفت کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است</p> <p>(ص ۸۴)</p> <p>(۰/۲۵) با توجه به قضیه فیثاغورس داریم:</p> <p>$AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 (۰/۲۵) \Rightarrow AB^2 < 8 (۰/۲۵) \Rightarrow AB < \sqrt{8} (۰/۲۵)$</p>	۱/۲۵									
۲۰	جمع نمره										

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»